

Cálculo de cotas de los parámetros de un controlador que satisface estabilidad robusta para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica

Mario López-Vega César Elizondo-González Cornelio Posadas-Castillo
Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica, FIME, UANL.

Av. Pedro de Alba S/N Cd. Universitaria

San Nicolás de los Garza, N.L., C.P.66451, México.

mario_lopez_vega@yahoo.com.mx celizond@yahoo.com cposadas@fime.uanl.mx

Teléfono: (81) 1340 4020 Ext.5773

Gerardo Romero-Galván

Departamento de Electrónica, UAT, Unidad Académica Reynosa-Rodhe. gromero@uat.edu.mx

Resumen—En el presente artículo se presenta un algoritmo capaz de calcular los intervalos de los parámetros del controlador que satisface estabilidad robusta relativa para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica en una región determinada, dando de una manera sencilla cierto desempeño en cuanto al acotamiento de la velocidad de respuesta del sistema. Se considera el caso más complejo en donde la familia de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica son de tipo polinómico. El problema es mapeado a un problema de positividad robusta de funciones multivariadas polinómicas y resuelto con la herramienta *descomposición de signo*.

Palabras clave: Incertidumbre, Estabilidad Robusta, Control Robusto.

I. INTRODUCCIÓN

El diseño de sistemas de control robusto es una de las áreas más importantes en aplicaciones de control industrial por lo que ha sido tema de investigación desde hace muchos años. Además el diseño de controladores ha evolucionado a tratar de lograr no solamente la estabilidad si no un desempeño del sistema. En la realidad industrial no existe un sistema en particular a analizar, lo que hay que analizar es una familia de sistemas; debido a que los valores de los parámetros físicos del sistema no son conocidos, lo único que se conoce son las cotas mínima y máxima de cada parámetro que se encuentra en determinado proceso, esto es conocido como incertidumbre paramétrica (Ackermann, J. and Bartlett, A., 1993), (Barmish, R. B., 1994). Por esta razón, el diseño de sistemas de control robusto haciendo uso de métodos en el espacio de parámetros es cada vez mas frecuente (Guvenc, L. and Ackermann, J., 2002), (Ackermann, J., 1980), (Siljak, D. D., 1989). El problema de estabilidad robusta paramétrica es mucho más complicado que determinar la estabilidad de un sistema LTI con parámetros fijos. Dicho problema se reduce a resolver un problema de positividad de funciones multivariadas polinómicas relativamente más sencillo. La herramienta matemática “descomposición de signo”

o nombrada por algunos autores como “sign-definite decomposition” (Elizondo C., 1999), (Elizondo C., 2000), (Elizondo C., 2010) es una herramienta que mediante el análisis de puntos extremos es capaz de determinar en condiciones necesarias y suficientes la positividad robusta de una función multivariable polinómica. Resultados recientes sobre este problema son basados también en dicha herramienta (Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2008), (Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2009), (Knap M. J., Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2009), (Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2011). En este artículo, se presenta una extensión de un algoritmo que calcula las cotas mínima y máxima estimadas de un parámetro del controlador que estabilizan robustamente a un sistema en lazo cerrado (López M. A., Elizondo C. y Posadas C., 2010), haciendo uso de tres herramientas, la primera de ellas es un reciente criterio de estabilidad (Elizondo C., 2001), la segunda es un criterio de estabilidad relativa (Elizondo C. y Alcorta E., 2005) y por último la herramienta descomposición de signo (Elizondo C., 1999), (Elizondo C., 2000), (Elizondo C., 2010). La organización del presente trabajo es como sigue:

La sección II, consta de una breve descripción de las herramientas antes mencionadas. En la sección III, es propuesto el algoritmo capaz de encontrar cotas estimadas inferior y superior para dos parámetros de la ganancia del controlador, que hacen que el sistema LTI retroalimentado con incertidumbre paramétrica satisfaga estabilidad robusta. En la sección IV se muestran ejemplos, en el que se aplica el algoritmo propuesto.

Finalmente en la sección V son presentadas conclusiones de este trabajo.

II. PRELIMINARES

Los análisis de estabilidad se realizarán mediante un

reciente criterio de estabilidad (Elizondo C., 2001) que tiene ventajas sobre los teoremas de: Routh, Hurwitz y Liénard-Chipart. Enseguida, se describe brevemente el criterio de estabilidad relativa (Elizondo C. y Alcorta E., 2005) y finalmente la herramienta “descomposición de signo” es descrita (Elizondo C., 1999), (Elizondo C., 2000), (Elizondo C., 2010).

II-A. Un reciente criterio de estabilidad (C. Elizondo)

Este reciente criterio de estabilidad se fundamenta en el principio del argumento, índices de Cauchy y cadenas modificadas de Sturm (Elizondo C., 2001). Mediante estas bases matemáticas es obtenido el siguiente teorema.

Teorema 1: (Elizondo C., 2001) *Dado un polinomio $p(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_{n-1}s^{n-1} + C_ns^n$ con coeficientes reales, el número de raíces en el lado derecho del plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo en la columna σ en el siguiente arreglo.*

σ_1	C_n	C_{n-2}	C_{n-4}	\dots
σ_2	C_{n-1}	C_{n-3}	C_{n-5}	\dots
σ_3	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	\dots	
σ_4	$e_{4,1}$	$e_{(4,2)}$	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots		
$\sigma_{(n-1)}$	$e_{(n-1),1}$	$e_{(n-1),2}$		
σ_n	$e_{(n,1)}$			
σ_{n+1}	$e_{(n+1),1}$			

$$e_{i,j} = (e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1}), \forall 3 \leq i \leq n+1$$

$$e_{i,j} = C_{n+1-i-2(j-1)} \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} \text{Sign}(e_{(m+2(j-1)),1}) \forall i \geq 3$$

$$m = 3 \text{ para } i \text{ par, } m = 2 \text{ para } i \text{ non.}$$

La metodología de cálculo del signo σ_i de un renglón es mucho más sencilla que la expresión matemática que lo determina: el signo σ_i de un renglón se determina multiplicando el signo de $e_{(i,1)}$ por el signo del elemento inmediato superior a éste, es decir el de $e_{(i-1),1}$ y por los signos de los elementos superiores de la columna e “brincando” de dos en dos. Por ejemplo: $\sigma_7 = \text{sign}(e_{(7,1)})\text{sign}(e_{(6,1)})\text{sign}(e_{(4,1)})\text{sign}(e_{(2,1)})$.

Debe de notarse que cada uno de los elementos $e_{i,j}$ fueron elaborados sin utilizar la división empleada en el criterio de Routh, por lo tanto los elementos $e_{i,j}$ en el caso de incertidumbre paramétrica son funciones multivariadas polinómicas. Así también los elementos $e_{i,j}$ son obtenidos de elementos de renglones superiores disminuyendo así notablemente las operaciones con respecto a los criterios de Hurwitz y Liénard-Chipart.

II-B. Estabilidad Relativa

En (Elizondo C. y Alcorta E., 2005) es presentado un análisis de cotas de polinomios característicos con coeficientes reales, en esa publicación es presentado un teorema que es útil a los fines del presente trabajo. Dicho teorema

determina que la parte real de la raíces esté contenida en una región específica de los reales como se muestra enseguida.

Teorema 2: (Elizondo C. y Alcorta E., 2005) *Sea $p(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + s^n$ el polinomio característico con coeficientes reales positivos correspondiente un sistema LTI, sean a y b dos números reales positivos. Entonces las raíces de $p(s)$ están localizadas, en el plano de los complejos, a la izquierda de $-a$ y a la derecha de $-b$ si y solo si los polinomios $p(s-a)$ y $p(-s-b)$ son asintóticamente estables.*

II-C. Breve descripción parcial de descomposición de signo

En el área de control robusto paramétrico se manejan propiedades como: estabilidad robusta, controlabilidad robusta y observabilidad robusta. El cumplimiento de cualquiera de estas propiedades en un sistema LTI con incertidumbre paramétrica puede ser mapeado a un problema de positividad robusta de funciones multivariable polinómicas dependientes en un vector de parámetros $q = [q_1 q_2 \dots q_\ell]^T$, de cada parámetro se conocen solamente las cotas inferior y superior $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ y el conjunto de todos los vectores q forman una caja de incertidumbre paramétrica $Q = \{q = [q_1 q_2 \dots q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i\}$. Para resolver el problema de positividad robusta de funciones multivariable polinómicas dependientes de un vector con incertidumbre paramétrica q , fue desarrollado en (Elizondo C., 1999) la siguiente herramienta matemática.

Descomposición de signo (Elizondo C., 1999), (Elizondo C., 2000), (Elizondo C., 2010)

(para mayor información ir a la sección de biblioteca digital en la página de la UANL, por falta de espacio las demostraciones no se incluyen en éste artículo), es una herramienta matemática que mediante el análisis de puntos extremos es capaz de determinar en condiciones necesarias y suficientes la positividad robusta de una función multivariable polinómica. Para poder introducir los conceptos de descomposición de signo son necesarias las siguientes dos definiciones previamente establecidas en matemáticas comunes.

Definición 1: *Sea P un cono convexo positivo en un espacio vectorial \mathbb{R}^ℓ , para $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ se dice que $x \geq y$ ($x > y$) con respecto a P si $x - y \in P$ ($x - y \in P^\circ$, el interior de P).*

Definición 2: *Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ es una función no-decreciente en Q si $x \geq y$ implica $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in Q$.*

Por falta de espacio de aquí en adelante solo se tomará la referencia (Elizondo C., 1999).

Definición 3: (Elizondo C., 1999) *Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ tiene descomposición de signo en Q si existen dos funciones acotadas no-decrecientes*

$f_n(\cdot) \geq 0, f_p(\cdot) \geq 0$, tales que $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ para toda $q \in Q$. Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función $f_p(\cdot)$ y la parte negativa de la función $f_n(\cdot)$.

$$\begin{aligned} f(q) &= f_p(q) - f_n(q) \quad \forall q \in Q \\ f_p(\cdot) &\triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot) \end{aligned}$$

Las partes negativa y positiva ($f_n(\cdot), f_p(\cdot)$), constituyen una representación (f_n, f_p) de la función en \mathbb{R}^2 con expresión gráfica en el plano ($f_n(\cdot), f_p(\cdot)$) de acuerdo con la figura 1.

Debe de notarse que si se toma un vector $q \in \mathbb{R}^\ell$ y se calculan $f_n(q)$ y $f_p(q)$, estas últimas forman las coordenadas de $f(q)$ en \mathbb{R}^2 quedando representada $f(q)$ por un punto en el plano (f_n, f_p) como se aprecia en la figura 1.

Definición 4: (Elizondo C., 1999) Se le llamará vértice mínimo y máximo Euclidiano v^{\min}, v^{\max} a los vectores elementos de $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2, \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2$$

Dado que las partes negativa $f_n(q)$ y positiva $f_p(q)$ son funciones no decrecientes en un espacio vectorial, entonces ambas son funciones acotadas dando lugar al siguiente teorema:

Teorema 3: (Teorema del Rectángulo) (Elizondo C., 1999) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} , entonces:

- $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ y $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$ respectivamente,
- la representación gráfica de la función $f(q), \forall q \in Q$ en el plano (f_n, f_p) está contenida en el rectángulo con vértices $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min})), (f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max})), (f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ y $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$,
- si el vértice inferior derecho $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$ está arriba de la recta de 45° entonces la función $f(q) > 0 \forall q \in Q$,
- si el vértice superior izquierdo $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$ está abajo de la recta de 45° entonces la función $f(q) < 0 \forall q \in Q$.

Las cotas de la función determinadas por el teorema del rectángulo son mejoradas al tomar en cuenta las partes independiente, lineal y no lineal de la función como se muestra en el siguiente teorema que requiere de la siguiente proposición.

Proposición 1: (Elizondo C., 1999) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$, sea $\Gamma^i \subset Q$ una caja

con su conjunto de vértices $\{\mu_i\}$ con vértices mínimos y máximos euclidianos μ^{\min}, μ^{\max} , sea $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$ y $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$; una caja con un conjunto de vértices $\{\delta_i\}$ con vértices mínimo y máximo euclidianos 0 y $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$ y sea $q \in \Gamma$ tal que $q = \mu^{\min} + \delta$ donde $\delta \in \Delta$, entonces la función $f(q)$ se puede expresar mediante sus partes lineal, no lineal e independiente en su mínima expresión, para toda $q \in \Gamma$.

$$f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma$$

$$f^{\min} \equiv \text{Parte Independiente} = f(\mu^{\min})$$

$$f_L(\delta) \equiv \text{Parte Lineal} = \nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$$

$$f_N(\delta) \equiv \text{Parte No - lineal}$$

$$f_N(\delta) = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta$$

Teorema 4: (Teorema del Polígono) (Elizondo C., 1999) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q , sean: q, δ, Γ y Δ de acuerdo a la proposición anterior. Entonces: a) la función $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por: Cota $\text{inf} = f^{\min} + f_{L\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\max})$ y Cota $\text{sup} = f^{\min} + f_{L\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\max}) \forall q \in Q$, b) las cotas del inciso "a" están contenidas en el intervalo que definen las cotas del teorema 3 $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\max}) \leq \text{Cota inf} \leq \text{Cota sup} \leq f_p(\mu^{\max}) - f_n(\mu^{\min})$, c) la representación gráfica de la función $f(q), \forall q \in \Gamma$ en el plano (f_n, f_p), está dentro del polígono que se define intersectando el rectángulo del teorema 3 con el espacio entre las rectas a 45° separadas del origen la cota mínima $f^{\min} + f_{L\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\max})$, y la cota máxima $f^{\min} + f_{L\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\max})$.

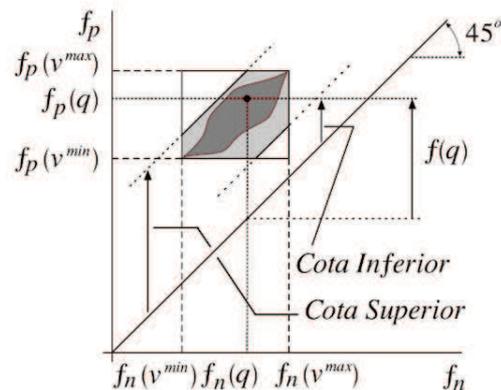


Figura 1: Rectángulo y polígono que contienen a la función $f(q)$

Teorema 5: (Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas). (Elizondo C., 1999)

Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min}, v^{\max} .

Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup \Gamma^i$ y $Cota \text{ inf} \geq c > 0$ para cada caja Γ^i ($Cota \text{ sup} \leq c < 0$ para cada caja Γ^i).

III. RESULTADOS PRINCIPALES

Los sistemas LTI con incertidumbre paramétrica poseen un polinomio característico con coeficientes que dependen de parámetros físicos:

$$P(s, q) = C_0(q) + C_1(q)s + C_2(q)s^2 \dots C_n(q)s^n$$

Donde $C_n(q)$ son funciones multivariadas polinómicas para $n = 0, 1, 2, \dots, m$. El conjunto de todos los polinomios característicos forman una familia de polinomios $P(s, Q) = \{p(s, q) = c_0(q) + c_1(q)s + c_2(q)s^2 + \dots + c_n(q)s^n | q \in Q\}$.

Las cotas inferior y superior de los parámetros $k_i^- \leq k_i \leq k_i^+ \forall i = 1, 2, \dots, m$ de un controlador forman un vector paramétrico de control $k = [k_1 k_2 \dots k_m]^T$ y el conjunto de todos los posibles vectores k forman una caja paramétrica de control $K = \{k = [k_1 k_2 \dots k_m]^T | k_i^- \leq k_i \leq k_i^+ \forall i = 1, 2, \dots, m\}$.

Nota: La familia de polinomios $P(s, Q \times K)$ es robustamente estable si cada elemento del conjunto de controladores $k \in K$ satisface positividad robusta a toda la columna sigma de acuerdo a la tabla del criterio (Elizondo C., 2001)

Mediante la herramienta descomposición de signo (Elizondo C., 1999), se probará la positividad robusta de cada una de las funciones multivariadas polinómicas que integran la primera columna de la tabla y así determinar la estabilidad robusta en lazo cerrado del sistema LTI con incertidumbre paramétrica para una caja $Q \times K$.

En este artículo se realiza una extensión del algoritmo presentado en (López M.A., Elizondo C. y Posadas C., 2010). Este algoritmo determina las cotas inferior y superior de la ganancia del controlador tomando en cuenta solo un parámetro del controlador. Enseguida se describe brevemente su funcionamiento:

Primeramente se requiere determinar un valor inicial de ganancia K^* , definir un valor $n > 1$ y definir una tolerancia ε . La ganancia K^* debe ser tal que el sistema sea robustamente estable. El algoritmo se compone de dos partes:

- I. Se obtiene el intervalo $[K^*, K_{Me}]$. (abre hacia la derecha)
- II. Se obtiene el intervalo $[K_{Me}, K^*]$. (abre hacia la izquierda)

Supongamos que la tolerancia estipulada es $\varepsilon = 0.25$ y el valor de $n = 2$, se tiene un valor inicial de ganancia $K^* = 2$ para el cual el sistema es robustamente estable en cierta región predeterminada, es decir, que la parte real de las raíces se encuentren entre $-a$ y $-b$. Se inicia la búsqueda de la cota máxima estimada K_{Me} en el intervalo $[2, 4]$ supongamos que se satisface estabilidad relativa robusta, por lo que $K_i = K_1 = 4$ el siguiente intervalo a analizar es

[4, 8], supongamos que no satisface estabilidad; entonces el siguiente intervalo a analizar es de [4, 6], suponiendo que satisface estabilidad robusta la $K_i = 6$ y ahora el siguiente intervalo a analizar es [6, 7]. Cuando el segmento a analizar es más pequeño que el ε dado, ya no tiene caso continuar con la búsqueda de la cota máxima estimada.

La parte II donde se obtiene la cota mínima estimada es una búsqueda decreciente de intervalo de ganancia, continuando con el ejemplo anterior, se inicia la búsqueda de la cota mínima estimada K_{me} en el intervalo $[0, 2]$ supongamos que no se satisface estabilidad robusta, por lo que el siguiente segmento a analizar es $[1, 2]$, ahora supongamos que si se satisface estabilidad relativa robusta, entonces la cota momentánea mínima es $K_i = K_1 = 1$ y el nuevo intervalo a analizar es $[0.5, 1]$, suponiendo que no se satisface estabilidad relativa robusta, el nuevo intervalo a analizar es $[0.75, 1]$ y así sucesivamente hasta que el segmento a analizar sea más pequeño que el ε dado y la cota mínima estimada será igual a la última cota momentánea mínima calculada.

Más detalles acerca del algoritmo se encuentran en (López M.A., Elizondo C. y Posadas C., 2010)

La descripción de la extensión del algoritmo es como sigue: Se parte un punto específico de parámetros del controlador $K^*(k_1^*, k_2^*)$ que satisfaga estabilidad robusta relativa, que llamaremos *Punto de Partida de Análisis*. El algoritmo hace la búsqueda de la región en la cual se satisface estabilidad robusta relativa en dos partes (hacia la derecha y hacia la izquierda de K^*). Debido a la falta de espacio en este artículo la descripción solo se hará hacia la derecha en los siguientes pasos: (ya que se utiliza la misma lógica para ambos sentidos)

1. Se propone una medida inicial de retícula a analizar ε y se define la tolerancia α con la finaliza el algoritmo.
2. Partiendo de un $K^*(k_1^*, k_2^*)$ que le da estabilidad robusta relativa al sistema, mediante el algoritmo (López M.A., Elizondo C. y Posadas C., 2010) se hace la búsqueda de la primer cota lateral derecha k_{1LD1} , para la cual el sistema es robustamente estable en el segmento $[k_1^*, k_{1LD1}]$ manteniendo $k_2 = k_2^*$.
3. Con el intervalo $[k_1^*, k_{1LD1}]$ y el valor propuesto de ε se obtiene el número inicial ν_1 de intervalos a analizar, ν_1 es el entero inmediato mayor a $\frac{(k_{1LD1} - k_1^*)}{\varepsilon}$.
4. Calcular el ancho de retícula a analizar $\varepsilon_1 = \frac{(k_{1LD1} - k_1^*)}{\nu_1}$.
5. Analizar la satisfacción de tolerancia. Si $\varepsilon_1 \leq \alpha\varepsilon$ ir al paso 9 de lo contrario continuar con el paso 6.
6. Calcular los ν_1 nuevos "puntos de partida de análisis" $(k_1^* + n\varepsilon_1, k_2^*) \forall n = 0, 1, 2, \dots, \nu_1$. Obteniendo así $\{K_1^*(k_{11}^*, k_{12}^*), K_2^*(k_{21}^*, k_{22}^*), \dots, K_{\nu_1}^*(k_{\nu_1 1}^*, k_{\nu_1 2}^*)\}$.
7. Para cada nuevo punto de partida de análisis, manteniendo constante k_{i1}^* se obtienen las cotas mínima y máxima estimadas para el parámetro k_{i2}^* : $k_{i2_{me}}$ y $k_{i2_{Me}}$ respectivamente. Dichas cotas se obtienen mediante el algoritmo (López M.A., Elizondo C. y

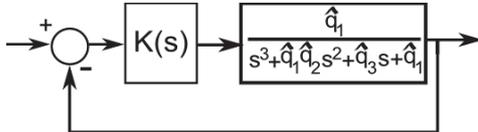
Posadas C., 2010), (Ver figura 2).

8. Regresar al paso 2 calculando el punto de partida de análisis $K^*(k_1^*, k_2^*)$ de la siguiente manera. $k_1^* = k_{\nu_1 1}^*$, $k_2^* = \frac{k_{\nu_1 2 m_e} + k_{\nu_1 2 M_e}}{2}$, (Ver figura 3)
9. Analizar la estabilidad robusta relativa en el conjunto de cajas rectangulares con lados paralelos a los ejes K_1 y K_2 con vertices A_i, B_i, C_i, D_i definidos de la siguiente manera. $k_{A i 1} = k_{i 1}^*$, $k_{A i 2} = \max\{k_{i 2 m_e}, k_{(i+1) 2 m_e}\}$; $k_{B i 1} = k_{(i+1) 1}^*$, $k_{B i 2} = k_{A i 2}$; $k_{C i 1} = k_{B i 1}$, $k_{C i 2} = \min\{k_{i 2 m_e}, k_{(i+1) 2 m_e}\}$; $k_{D i 1} = k_{A i 1}$, $k_{D i 2} = k_{C i 2}$, (Ver figura 4).
10. Aplicar "partición de cajas" a cada caja del paso anterior que no satisfaga las condiciones de estabilidad. Cada una de estas cajas se particiona equidistantemente en cuatro subcajas, a cada una se le aplica el análisis de estabilidad robusta relativa. El procedimiento de partición se aplica iterativamente en cada subcaja que no satisfaga las condiciones de estabilidad. El procedimiento termina cuando el ancho o alto de la subcaja a analizar es menor o igual a α, ε (Ver figura 5).

Nota: La figura 6 muestra que para mayor precisión de la región de estabilidad es necesario mayor numero de particiones y por lo tanto mayor número de subcajas a analizar; ya que nos enfrentamos a un problema no convexo.

IV. EJEMPLO

Ejemplo 1. Considere el siguiente sistema con incertidumbre paramétrica, en cascada con un controlador PI y retroalimentación unitaria:



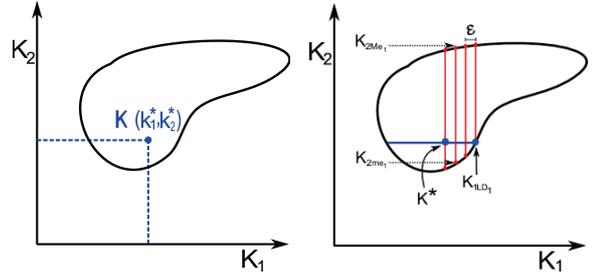
Donde:

$$K(s) = (K_p + \frac{K_i}{s}) = (\hat{q}_4 + \frac{\hat{q}_5}{s})$$

El polinomio característico en lazo cerrado queda de la siguiente forma:

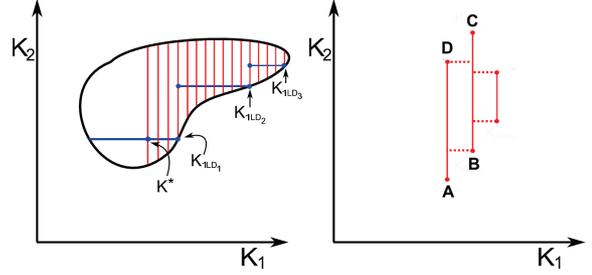
$$p(s, \hat{q}) = s^4 + \hat{q}_1 \hat{q}_2 s^3 + \hat{q}_3 s^2 + (\hat{q}_1 + \hat{q}_1 \hat{q}_4) s + q_1 \hat{q}_5$$

Los parámetros del sistema con incertidumbre son como sigue: $q_1 \in [1.9, 2.1]$ $q_2 \in [2.37, 2.62]$ $q_3 \in [4.75, 5.25]$. Se desea encontrar las cotas estimadas de la ganancia del controlador K^* de tal manera que la parte real de las raíces del polinomio característico en lazo cerrado se encuentren dentro de $[-5, -1]$. Para conseguir esto, se hace uso del teorema de estabilidad relativa (López M.A., Elizondo C. y Posadas C., 2010) en donde se analiza la positividad robusta de dos polinomios $p(s-a, q)$ y $p(-s-b, q)$, donde $a = 0.1$ y $b = 5$. Mediante el criterio de estabilidad (Elizondo C., 2001) se obtienen dos tablas correspondientes a cada polinomio y mediante "descomposición de signo" se analiza la positividad robusta de los elementos e_i de cada tabla,



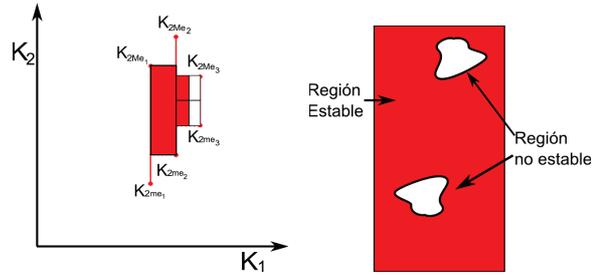
(a) Fig. 1

(b) Fig. 2



(c) Fig. 3

(d) Fig. 4



(e) Fig. 5

(f) Fig. 6

si y solo si todos los elementos son positivos entonces el sistema del polinomio analizado será robustamente estable. Para poder hacer uso de la herramienta descomposición de signo es necesario normalizar los parámetros \hat{q}_i de tal manera que toda q_i sea no negativa y es mucho más cómodo si se convierte en un nuevo parámetro $q_i \in [0, 1]$.

Los coeficientes de la tabla con los parámetros normalizados quedan de la siguiente forma: $p(s-a, q) = C_4(q)s^4 + C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0$

$$C_4(q) = 1$$

$$C_3(q) = 0.475q_1 + 0.475q_2 + 0.05q_1q_2 + 4.1125$$

$$C_2(q) = 0.5q_3 - 0.1425q_2 - 0.1425q_1 - 0.015q_1q_2 + 3.4563$$

$$C_1(q) = 0.21425q_1 + 0.01425q_2 - 0.1q_3 + 1.9q_4 + 0.2q_1q_4 + 0.0015q_1q_2 + 1.0814$$

$$C_0(q) = 0.005q_3 - 0.0004754q_2 - 0.020475q_1 - 0.19q_4 + 1.9q_5 - 0.00005q_1q_2 - 0.02q_1q_4 + 0.2q_1q_5 - 0.14691$$

$$e_{3,1}(q) = C_3(q)C_2(q) - C_4(q)C_1(q)$$

$$e_{3,2}(q) = C_3(q)C_0(q) - C_4(q)(0)$$

$$e_{4,1}(q) = e_{3,1}(q)C_1(q) - C_3(q)e_{3,2}(q)$$

(1)

$$p(-s-b, q) = C_4(q)s^4 + C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s +$$

C_0

$$\begin{aligned}
 C_4(q) &= 1 \\
 C_3(q) &= 15.488 - 0.475q_2 - 0.05q_1q_2 - 0.475q_1 \\
 C_2(q) &= 0.5q_3 - 7.125q_2 - 7.125q_1 - 0.75q_1q_2 + 87.063 \\
 C_1(q) &= 5.0q_3 - 35.625q_2 - 35.825q_1 - 1.9q_4 - 3.75q_1q_2 - \\
 &\quad 0.2q_1q_4 + 207.16 \\
 C_0(q) &= 12.5q_3 - 59.375q_2 - 60.375q_1 - 9.5q_4 - \\
 &\quad 6.25q_1q_2 - 1.0q_1q_4 + 170.19 \\
 e_{3,1}(q) &= C_3(q)C_2(q) - C_4(q)C_1(q) \\
 e_{3,2}(q) &= C_3(q)C_0(q) - C_4(q)(0) \\
 e_{4,1}(q) &= e_{3,1}(q)C_1(q) - C_3(q)e_{3,2}(q)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Debido a la falta de espacio en el artículo, solo se indica como se obtienen los coeficientes $e_{3,1}, e_{3,2}, e_{4,1}$. No es necesario analizar la positividad robusta del coeficiente $e_{5,1}$, basta con que sean robustamente positivos los coeficientes $e_{3,2}$ y $e_{4,1}$; ya que $e_{5,1}$ se obtiene de la multiplicación de ambos. Es aplicado el algoritmo presentado partiendo de un $K^* = [0.6, 2]$ y $\nu = 20$. A continuación se presenta la región que es robustamente estable para cada polinomio $p(s - a, q)$ y $p(-s - b, q)$.

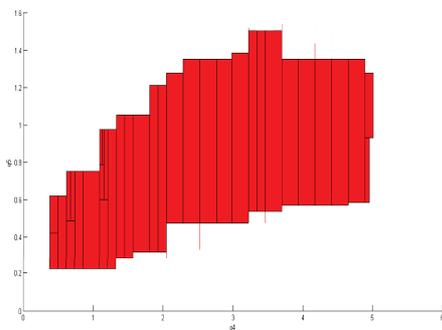


Figura 2: Región de estabilidad del sistema para el polinomio $p(s - a, q)$

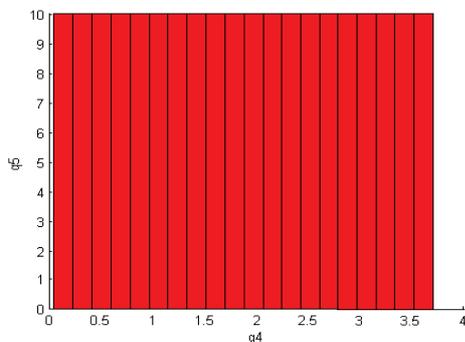


Figura 3: Región de estabilidad del sistema para el polinomio $p(-s - b, q)$

La región de estabilidad es la intersección de ambas regiones. Dicha intersección indica los valores de k_1 y k_2 que hacen que el sistema en lazo cerrado sea robustamente estable manteniendo la parte real de las raíces en el segmento $[-5, -0.1]$

V. CONCLUSIONES

En el presente artículo se determinaron las cotas estimadas de los parámetros del controlador que permiten establecer una región en donde se satisface estabilidad robusta relativa para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. El problema es básicamente mapeado a un problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas que se resolvió haciendo uso de la herramienta matemática “descomposición de signo” o “descomposición de signo definida”. Si el número de parámetros del sistema a analizar aumentan o si se requiere mayor exactitud de la región de estabilidad deberá aumentar también el número de particiones y de cajas a analizar. En general, el costo computacional depende del sistema y del tamaño de retícula a analizar.

REFERENCIAS

- Ackermann, J. and Bartlett, A. (1993) *Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer, ISBN 978-0387198439.
- Ackermann, J. *Parameter space design of robust control system*. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-25, no. 6, pp. 1058-1072.
- Barmish, R. B. (1994) *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan, New York, NY.
- Bhattacharyya S. P., Datta A., y Keel L. H. (2009). *Linear Control Theory. Structure, Robustness and Optimization*. Taylor and Francis Group. Boca Raton, London, New York.
- Elizondo C. (1999). *Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal*. Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Elizondo C. (2000) *Necessary and Sufficient Conditions for Robust Positivity of Polynomial Functions Via Sign Decomposition*, Robust Control Design. IFAC ROCOND, Prage Czech Republic.
- Elizondo C. (2001) *A new stability criterion on space coefficients*. Conferences on Decision and Control IEEE, Orlando Florida USA
- Elizondo C. y Alcorta E. (2005) *Análisis de Cotas de Raíces de Polinomios Característicos y Nuevo Criterio de Estabilidad*. AMCA.
- Elizondo C. (2011) *Parametric Robust Stability, Recent Advances in Robust Control - Theory and Applications in Robotics and Electromechanics*, Andreas Mueller (Ed.), ISBN: 978-953-307-421-4, InTech, Available from: <http://www.intechopen.com/books/recent-advances-in-robust-control-theory-and-applications-in-robotics-and-electromechanics/parametric-robust-stability>
- Guvenc, L. and Ackermann, J. (2002) *Links between the parameter space and frequency domain methods of robust control*. Int. J. Robust Nonlinear Control, vol.11, no. 15, pp. 1435-1452, Jan.2002
- Siljak, D. D. (1989) *Parameter space methods for robust control design: a guided tour* IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-34, no.7, pp. 674-688.
- Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2008). *Fixed Order Multivariable Controller Synthesis: A New Algorithm*, Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico.
- Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2009). *Fixed Order Multivariable Discrete-Time Control*, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China.
- Knap M.J., Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2010). *Robust stability of complex systems with applications to performance attainment problems*, American Control Conference (ACC)
- Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2011). *Robust Stability via Sign-Definite Decomposition*, IEEE Transactions on Automatic Control
- López M. A., Elizondo C. y Posadas C. (2010) *Control para Estabilidad Robusta Relativa de Sistemas LTI con Incertidumbre Paramétrica*, AMCA2010, Puerto Vallarta, Jalisco, México.